Universidad Simón Bolívar
Departamento de matemáticas
Puras y Aplicadas

NOMBRE:__________________________________

CARNET:_________________ **SEC:**__________

Examen Tipo: A

3er. Parcial de M 1112

1-. (8 puntos) Resolver la integral

$$\int \frac{3x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx$$

2.- (5 puntos cada una) Resolver los siguientes límites

i.- $\lim\limits_{x\to\infty} x\,(2^{1/x}-1)$

ii.- $\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{1/2x}$

3.- (6 puntos cada una) Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias

i.- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

ii.- $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{(1+x)}{e^x}\,dx$

4.- (10 puntos) La región acotada por la parábola $y = x^2$ **y la recta** $y = 2x$ **, en el primer cuadrante, gira alrededor del eje Y para generar un sólido. Hallar el volumen del sólido.**

Universidad Simón Bolívar
Departamento de matemáticas
Puras y Aplicadas

SOLUCION

3er. Parcial de M 1112

1-. (puntos) Resolver la integral

$$\int \frac{3x+1}{(\mathrm{x}^2+1)(x-1)^2}\,dx$$

Respuesta

$$\frac{3x+1}{(\mathrm{x}^2+1)(x-1)^2} = \frac{\mathrm{Ax}+\mathrm{B}}{(\mathrm{x}^2+1)} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{\mathrm{D}}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2(Ax+B)+C(x^2+1)(x-1)+D(x^2+1)}{(x^2+1)\,(x-1)^2} =$$

$$\frac{(A+C)\,x^3 + \ (B-2A-C*D)x^2 + (A-2B+C)x + (B-C+D)}{(x^2+1)\,(x-1)^2}$$

Igualando coeficientes se tiene

$$\begin{aligned}
&A+C=0\\
&B-2A-C+D=0\\
&A-2B+C=0\\
&B-C+D=1
\end{aligned}$$

Resolviendo se tienen: $A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{3}{2},\ C=-\frac{1}{2}\ ,\mathrm{D}=2$

$$\int \frac{3x+1}{(\mathrm{x}^2+1)(x-1)^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}\mathrm{x}-\frac{3}{2}}{(\mathrm{x}^2+1)}\,\mathrm{dx} - \int \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)}\,dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{2\mathrm{x}-6}{\mathrm{x}^2+1}\,\mathrm{dx} - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}|\mathrm{x}-1| - \frac{2}{x-1} + \mathrm{C}_1 = \frac{1}{4}\int \frac{2\mathrm{x}+1-7}{\mathrm{x}^2+1}\,\mathrm{dx} - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}|\mathrm{x}-1| - \frac{2}{x-1} + \mathrm{C}_1$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{2\mathrm{x}+1-7}{\mathrm{x}^2+1}\,\mathrm{dx} - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}|\mathrm{x}-1| - \frac{2}{x-1} + \mathrm{C} = \frac{1}{4}\int \frac{2\mathrm{x}+1}{\mathrm{x}^2+1}\,\mathrm{dx} - \frac{1}{4}\int \frac{7}{\mathrm{x}^2+1}\,\mathrm{dx} - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}|\mathrm{x}-1| - \frac{2}{x-1} + \mathrm{C}_1$$

$$\int \frac{3x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\,\mathrm{Ln}\left|x^2+1\right| - \frac{7}{4}\,\mathrm{arctg}\ x - \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\left|x-1\right| - \frac{2}{x-1} + C$$

2.- (puntos) Resolver los siguientes límites

i.- $\lim\limits_{x\to\infty} x\,(2^{1/x}-1)$

Respuesta:

$\lim\limits_{x\to\infty} x\,(2^{1/x}-1)$ es de la forma $\infty.0$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{1/x}-1}{1/x}$ es de la forma $\dfrac{0}{0}$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{1/x}-1}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{Ln}(2)\ 2^{1/x}\,(1/x^2)}{-1/x^2} = \mathrm{Ln}\,2$$

ii.- $\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{1/2x}$

Respuesta:

$\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{1/2x}$ es de la forma 1^∞

$$\lim_{x\to 0} (1+3x)^{1/2x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{Ln}\left|(1+3x)\right|^{1/2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{Ln}\left|(1+3x)\right|^{1/2x}} =$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{Ln}\left|(1+3x)\right|^{1/2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{Ln}\left|(1+3x)\right|}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{3}{1+3x}}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{2(1+3x)}} = e^{\frac{3}{2}}$$

3.- (puntos) Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias

i.- $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$

Respuesta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \lim_{a\to-\infty} arctg\, e^x\Big|_a^{\infty} + \lim_{b\to\infty} arctg\, e^x\Big|_0^{\infty} =$$

$$\lim_{a\to-\infty} (arctg\, e^0 - \mathrm{arctg}\, e^a) + \lim_{b\to\infty} (arctg\, e^b - \mathrm{arctg}\, 1) = \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

ii.- $\int_1^{\infty} \frac{(1+x)}{e^x}dx$

$$\int_1^{\infty} \frac{(1+x)}{e^x}dx =$$

Primero resolvemos la integral indefinida, por el método de integración por partes

Sean $u = 1+x$ entonces $du = dx$

$dv = e^{-x}dx$ entonces $v = -e^{-x}$

$$\int \frac{1+x}{e^x}dx = -(1+x)e^{-x} - e^{-x} + \int e^{-x}\,dx + c = -e^{-x} - x e^{-x} - e^{-x} + c = -2e^{-x} - x e^{-x} + c$$

$$\int_1^{\infty} (1+x)e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} (-2e^{-x} - x e^{-x})\Big\}_1^b = \lim_{b\to\infty} (-2e^{-b} - b e^{-b} + 2e^{-1} + e^{-1}) = 3e^{-1}..$$

$\int_1^{\infty} (1+x)e^{-x}dx = 3e^{-1}$, luego la integral converge.

4.- (puntos) La región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x$, en el primer cuadrante, gira alrededor del eje Y para generar un sólido. Hallar el volumen del sólido.

Solución:

$y = x^2$ entonces $x = \sqrt{y}$

$y = 2x$ entonces $x = \frac{y}{2}$

Puntos de intersección:

$x^2 = 2x$ entonces $x^2 - 2x = 0$ luego $x = 0$ y $x = 2$ y los puntos son $(0, 0)$ y $(2, 4)$

$$V = \pi\int_0^4 \left[\left(\sqrt{y}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right]dy = \pi\int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{2}\right)dy = \pi\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right)_0^4 = \frac{8}{3}\pi$$